УДК 517.392; 550.831

И. В. Бойков, А. И. Бойкова

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГОМОТОПИИ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Аннотация. Дано применение метода гомотопии к приближенному решению обратных задач логарифмического и ньютоновского потенциала. Рассматриваются обратные задачи логарифмического и ньютоновского потенциала в линейной и нелинейной постановках. Предложенные алгоритмы могут применяться для решения широкого класса обратных задач, описываемых интегральными уравнениями.

Ключевые слова: метод гомотопии, обратная задача, интегральное уравнение, метод регуляризации.

Abstract. The article shows a homotopy method for approximate solutions to reverse problems of logarithmic and Newtonian potential. The authors consider the reverse problems of logarithmic and Newtonian potential through linear and non-linear approaches. The suggested algorithms may be applied in solutions of a broad class of reverse problems, described by integral equations.

Key words: homotopy method, reverse problem, integral equation, regularizing method.

Введение

При исследовании многих проблем физики и техники возникает необходимость в решении обратных задач. Обратные задачи могут описываться различным математическим аппаратом, но общим во всех этих задачах следующее: как правило, они являются некорректно поставленными и для своего решения требуют использования методов регуляризации.

Различные методы регуляризации предложены в работах [1–5].

В данной работе исследуются методы решения обратных задач, описываемых интегральными уравнениями Фредгольма. При этом основное внимание уделяется обратным задачам логарифмического и ньютоновского потенциалов. Это обусловлено тем, что обратными задачами логарифмического и ньютоновского потенциалов моделируются обратные задачи гравиразведки и магниторазведки.

Методом решения обратных задач и, в частности, обратных задач гравиразведки и магниторазведки посвящена обширная литература [6–10].

Метод регуляризации, предложенный в данной работе, опирается на следующее свойство полиномов Бернштейна.

Определение 1 [11]. Пусть $f(x)$ есть функция, заданная на сегменте $[0,1]$. Полином

$$B_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) C_N^k x^k (1-x)^{N-k}$$

называется полиномом Бернштейна функции $f(x)$.

Полиномы Бернштейна обладают следующим замечательным свойством.

Теорема Канторовича [11]. Если $f(x)$ есть целая функция, то ее полином Бернштейна $B_N(x)$ сходится к ней на всей оси.

В данной работе метод регуляризации заключается в том, что вместо решения исходного уравнения Фредгольма первого рода $Kx = f$ решается последовательность уравнений второго рода $(\lambda + \beta)x(\lambda) + Kx(\lambda) = f$, где λ принимает значения $\lambda_k = k/N$, $k = 0,1,\ldots,N$, $N-$ целое число, $\beta = 1/N$.

Решение x^* уравнения $Kx = f$ определяется формулой

$$x^* = B_N\left(-\frac{1}{N}\right),$$

где $B_N(\lambda)$ – полином Бернштейна,

$$B_N(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k x\left(\frac{k}{N}\right)\lambda^k (1-\lambda)^{N-k};$$

$x\left(\frac{k}{N}\right)$ – решение уравнения

$$x\left(\lambda + \frac{1}{N}\right)x(\lambda) + Kx(\lambda) = f$$

при $\lambda = k/N$.

В случае, если решение уравнения $(\lambda + \beta)x(\lambda) + Kx(\lambda) = f$ является целой функцией по параметру λ или аналитической функцией по параметру λ в области Ω $\left([0,1] \subset \Omega\right)$, то применимость описанного алгоритма следует из теоремы Канторовича о сходимости полиномов Бернштейна [11].

Метод гомотопии для решения интегральных уравнений Фредгольма, использующий аппроксимационные свойства полиномов Бернштейна, предложен в работе [12]. Ниже показано, что этот метод позволяет в обратных задачах гравиразведки одновременно восстанавливать форму и плотность гравитирующего тела.

1. Обратная задача теории потенциала в линейной постановке

Известно [13], что обратная задача теории потенциала в линейной постановке описывается уравнением

$$2G\sigma H \int_a^b \frac{z(\zeta)}{(x-\zeta)^2 + H^2} d\zeta = f(x).$$

Изложим метод продолжения по параметру для более общего уравнения

$$Kx \equiv \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \qquad (1)$$

Известно, что решение уравнений Фредгольма первого рода является некорректной задачей, требующей алгоритмов регуляризации. Для ее решения разработаны методы регуляризации, основанные на различных подходах [1–3]. Изложим метод, основанный на продолжении решения по параметру λ. Для простоты изложения предположим, что оператор K – самосопряженный. В противном случае от уравнения (1) можно перейти к уравнению $K^*Kx = K^*f$, где K^* – оператор, сопряженный с оператором K.

Поставим уравнению (1) в соответствие семейство уравнений

$$K_\lambda x \equiv (\lambda+\beta)x(\lambda,t) + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\lambda,\tau)d\tau = f(t), \qquad (2)$$

где λ – вещественный параметр, $0 \le \lambda \le 1$; $\beta > 0$ – параметр регуляризации.

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде полинома

$$x_N(\lambda,t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(\lambda)\psi_k(t), \qquad (3)$$

где $\psi_k(t)$, $k = 1,2,\dots,N$, – фундаментальные полиномы, построенные по узлам полинома Лежандра порядка N.

Коэффициенты $\{\alpha_k(\lambda)\}$ находим по методу механических квадратур из системы линейных алгебраических уравнений

$$K_{N,\lambda}x_N \equiv P_N^t\left[(\lambda+\beta)x_N(\lambda,t) + \int_{-1}^{1} P_N^\tau\left[h(t,\tau)x_N(\lambda,\tau)\right]d\tau\right] = P_N^t[f(t)], \qquad (4)$$

где P_N^t – оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени $(N-1)$ по узлам полинома Лежандра N-го порядка. Верхний индекс у оператора P_N означает переменную, по которой проводится проектирование.

Обоснование метода механических квадратур для уравнений Фредгольма второго рода хорошо известно [14, 15], и поэтому не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим последовательность значений $\lambda_j = j/M$, $j = 0,1,\dots,M$.

Для каждого значения λ_j, $j = 0,1,\dots,M$, решим систему уравнений (4). В результате получаем множество решений $\{x_N(\lambda_j;t)\}$, $j = 0,1,\dots,M$.

Составим из этого множества полином Бернштейна

$$B_M(\lambda,t) = \sum_{k=0}^{M} C_M^k x_N(\lambda_k,t)\lambda^k(1-\lambda)^{M-k}.$$

Приближенное решение уравнения (1) определяется формулой $x_N^*(t) = B_M(-\beta,t), \beta = 1/M$.

2. Обратная задача ньютоновского потенциала в линейной постановке

Обратная задача ньютоновского потенциала в линейной постановке для тела, занимающего область V, $V = a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ -H \le z \le -H + \varphi(x, y)$, описывается уравнением

$$G\int_a^b\int_c^d \sigma(\zeta,\eta)\left[\frac{H\varphi(\zeta,\eta)}{((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+H^2)^{3/2}}\right]d\zeta d\eta = f(x,y,0).$$

Здесь G – гравитационная постоянная, $\sigma(\zeta,\eta)$ – плотность гравитирующего тела.

Естественно рассмотреть более общее уравнение

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{5}$$

где $t = (t_1,\dots,t_l)$, $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_l)$. Для определенности ниже полагаем $l = 2$, но все утверждения дословно переносятся на случай произвольного конечного l.

Уравнению (5) поставим в соответствие семейство уравнений

$$K_\lambda x \equiv (\lambda+\beta)x(\lambda,t) + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\lambda,\tau)d\tau = f(t), \tag{6}$$

где λ, β – численные параметры, $0 \le \lambda \le 1$, и повторим рассуждения, приведенные в предыдущем разделе.

Положим $0 \le \lambda \le 1$, $\beta > 0$, и введем узлы $\lambda_k = k/M$, $k = 0,1,\dots,M$.

Приближенное решение уравнения (6) будем искать в виде полинома

$$x_N(\lambda,t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}(\lambda)\psi_i(t_1)\psi_j(t_2), \tag{7}$$

где $\psi_i(t)$ – фундаментальные полиномы по узлам полиномов Лежандра степени N.

Коэффициенты $\{\alpha_{ij}(\lambda)\}$, $i, j = 1,2,\dots,N$, находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$K_{N,\lambda}x_N \equiv (\lambda+\beta)x_N(\lambda,t) +$$

$$+P_N^{t_1}P_N^{t_2}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_N^{\tau_1}P_N^{\tau_2}\left[h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x_N(\lambda,\tau_1,\tau_2)\right]d\tau_1 d\tau_2\right] = P_N^{t_1}P_N^{t_2}\left[f(t_1,t_2)\right]. \tag{8}$$

Обоснование метода механических квадратур для уравнений Фредгольма второго рода хорошо известно и на этом не будем останавливаться.

Решим систему уравнений (8) для набора значений $\lambda_j = j/M$, $j = 0,1,\dots,M$. В результате получаем набор решений $x_N(\lambda_j,t)$, $j = 0,1,\dots,M$, из которых составляем полином Бернштейна

$$B_N(\lambda,t)=\sum_{k=0}^{M} C_M^k x_N(\lambda_k,t)\lambda^k(1-\lambda)^{M-k}.$$

Приближенное решение уравнения (5) определяется формулой $x_N^*(t_1,t_2)=B_N(-\beta,t),\beta=1/M.$

3. Обратная задача логарифмического потенциала в нелинейной постановке

Нелинейная постановка обратной задачи логарифмического потенциала для бесконечно протяженной по оси OY контактной поверхности $z(x)$ описывается [16] нелинейным интегральным уравнением

$$Kz\equiv G\sigma\int_a^b \ln\frac{(x-s)^2+H^2}{(x-s)^2+(H-z(s))^2}ds=f(x), \tag{9}$$

где $z(\zeta)$ – форма поверхности гравитирующего тела; H – глубина залегания; σ – плотность гравитирующего тела; G – гравитационная постоянная, $|z(\zeta)|<H$.

Для простоты дальнейших обозначений положим $a=-1,\ b=1$.

Как и в предыдущих пунктах, введем параметры λ и β, $\beta>0$, $0\le\lambda\le1$, и поставим уравнению (9) в соответствие семейство уравнений

$$K_\lambda z\equiv(\lambda+\beta)z(x)+G\sigma\int_{-1}^{1}\ln\frac{(x-s)^2+H^2}{(x-s)^2+(H-z(s))^2}ds=f(x). \tag{10}$$

Приближенное решение уравнения (10) будем искать в виде полинома

$$z_N(\lambda,x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k(\lambda)\psi_k(x),$$

где $\{\psi_k(x)\}$, $k=1,2,\ldots,N$, – фундаментальные полиномы по узлам полинома Лежандра степени N.

Коэффициенты $\{\alpha_k(\lambda)\}$, $k=1,2,\ldots,N$, находятся из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$K_{N,\lambda}(z_N)\equiv(\lambda+\beta)z_N(\lambda,x)+$$

$$+P_N^x\left[G\sigma\int_{-1}^{1}P_N^s\left[\ln\frac{(x-s)^2+H^2}{((x-s)^2+(H-z(\lambda_N,s))^2}\right]ds\right]=P_N^x[f(x)]. \tag{11}$$

Пусть $\lambda_j=j/M$, $j=0,1,\ldots,M$. Для каждого значения λ_j, $j=0,1,\ldots,M$, решаем систему уравнений (11) методом Ньютона – Канторовича:

$$z_N^{k+1}(\lambda,x)=z_N^k(\lambda,x)-\left[K'_{N,\lambda}(z_0(s))\right]^{-1}\left(K_{N,\lambda}z_N^k(\lambda,x)-P_N^x\left[f(x)\right]\right), \tag{12}$$

где $K'_{N,\lambda}(z(0))$ – производная Фреше оператора $K_{N,\lambda}z$ на начальном элементе $z(0)$. Отметим, что начальный элемент может быть как общим для всех значений параметра λ_j, так и для каждого значения λ_j можно выбирать собственное начальное приближение в зависимости от результатов решения уравнения (12) при других значениях λ_j.

Производная Фреше оператора $K_{N,\lambda}(z_N)$ на элементе $z_0(s)$ определяется выражением

$$K'_{N,\lambda}(z_0)v_N \equiv (\lambda+\beta)v_N(\lambda,x)+$$

$$+P_N^x\left[G\sigma\int_{-1}^{1}P_N^s\left[\frac{2(H-z_0(s))}{(x-s)^2+(H-z_0(s))^2}v_N(\lambda,s)\right]ds\right].$$

Обоснование сходимости итерационного процесса (12) проводится на основании общих теорем метода Ньютона – Канторовича, приведенных в монографиях [14, 15] и в разделе 6 главы 1 монографии [17].

Решив систему уравнений (11) методом Ньютона – Канторовича (12) при $\lambda_j = j/M$, $j=0,1,\ldots,M$, получаем семейство решений $z_N^*(\lambda_j,t)$, $j=0,1,\ldots,M$. Из функций $\{z_N^*(\lambda_j,t)\}$, $j=0,1,\ldots,M$, составим полином Бернштейна

$$B_N(\lambda,t)=\sum_{k=0}^{M}C_M^k z_N^*(\lambda_k,t)\lambda^k(1-\lambda)^{M-k}.$$

Приближенное решение уравнения (10) определяется формулой $z^*(t)=B_N(-\beta,t),\beta=1/M$.

4. Обратная задача гравиразведки в нелинейной постановке

В случае, если гравитирующее тело залегает на глубине H, его нижняя поверхность совпадает с плоскостью $z=-H$, а верхняя поверхность описывается функцией $z(x,y)=-H+\varphi(x,y)$, причем функция $\varphi(x,y)$ неотрицательна и $\varphi(x,y)<H$, то гравитационное поле на поверхности Земли описывается уравнением

$$G\sigma\int_a^b\int_c^d\frac{d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H-\varphi(\zeta,\eta))^2)^{1/2}}=f(x,y), \qquad (13)$$

где G – гравитационная постоянная; σ – плотность гравитирующего тела.

Для удобства обозначений уравнение (13) запишем в виде

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H-z(\zeta,\eta))^2)^{1/2}}=f(x,y), \qquad (14)$$

где $z(x,y)$ – искомое решение.

Уравнению (14) поставим в соответствие семейство уравнений

$$K_{\lambda}(z) \equiv (\lambda+\beta) z(\lambda; x, y)+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^{2}+(y-\eta)^{2}+(H-z(\lambda; \zeta, \eta))^{2})^{1/2}}=f(x, y), \qquad (15)$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$, $\beta>0$.

Приближенное решение уравнения (15) будем искать в виде полинома

$$z_{N}(\lambda, \zeta, \eta)=\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \alpha_{kl}(\lambda) \psi_{k}(\zeta) \psi_{l}(\eta),$$

где $\psi_{k}(\zeta)$ – фундаментальные полиномы по узлам полинома Лежандра N порядка.

Коэффициенты $\{\alpha_{kl}(\lambda)\}$, $k, l=1,2, \ldots, N$, находим из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$K_{N, \lambda}(z_{N})=(\lambda+\beta) z_{N}(\lambda, x, y)+$$

$$+P_{N}^{x} P_{N}^{y}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_{N}^{\zeta} P_{N}^{\eta}\left[\frac{d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^{2}+(y-\eta)^{2}+(H-z_{N}(\lambda, \zeta, \eta))^{2})^{1/2}}\right]\right]=$$

$$=P_{N}^{x} P_{N}^{y}[f(x, y)], \qquad (16)$$

где P_{N} – оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени $(N-1)$, построенных по N узлам полинома Лежандра.

Уравнение (16) решается методом Ньютона – Канторовича

$$z_{N}^{k+1}(\lambda; x, y)=z_{N}^{k}(\lambda; x, y)-$$

$$-\left[K_{N, \lambda}\left(z_{0}(x, y)\right)\right]^{-1}\left(K_{N, \lambda}\left(z_{N}^{k}(\lambda; x, y)\right)-P_{N}^{x} P_{N}^{y}[f(x, y)]\right),$$

где $K_{N, \lambda}^{\prime}(z_{0}(x, y))$ – производная Фреше оператора $(K_{N, \lambda}(z_{N})$ на элементе $z_{0}(x, y)$; $z_{0}(x, y)$ – начальное приближение.

Обоснование сходимости итераций (16) проводится на основании общих теорем сходимости метода Ньютона – Канторовича, приведенных в монографиях [14, 15] и в разделе 6 главы 1 монографии [17].

Решив уравнение (16) при значениях $\lambda_{j}=j / M$, $j=0,1, \ldots, M$, получаем семейство решений $\{z_{N}^{*}(\lambda_{j}; x, y)\}$. Из этих решений составим полином Бернштейна:

$$B_{M}(\lambda; x, y)=\sum_{k=1}^{N} C_{M}^{k} z_{N}^{*}(\lambda_{k}; x, y) \lambda^{k}(1-\lambda)^{M-k}.$$

Решение уравнения (13) определяется формулой $z_{N}^{*}(x, y)=B_{M}(-\beta; x, y)$, $\beta=1 / M$.

5. Одновременное нахождение плотности и границы гравитирующего тела

Метод одновременного нахождения плотности и границы гравитирующего тела изложим для линейной постановки задачи.

Вначале рассмотрим обратную задачу логарифмического потенциала.

Рассмотрим уравнение

$$2GH\int_a^b \frac{z(\zeta)\sigma(\zeta)}{(x-\zeta)^2+H^2}d\zeta = f(x), \tag{17}$$

где $\sigma(\zeta)$ – плотность гравитирующего тела.

Предположим, что геофизическая съемка проводилась также на высоте h_1 от уровня $z=0$.

В этом случае функция $z(\zeta)$ определяется также из уравнения

$$2G(H+h_1)\int_a^b \frac{z(\zeta)\sigma(\zeta)}{(x-\zeta)^2+(H+h_1)^2}d\zeta = f_1(x). \tag{18}$$

Требуется из системы уравнений (17), (18) определить неизвестные функции $(z(\zeta),\sigma(\zeta))$, $a\le\zeta\le b$.

Для простоты изложения положим $a=-1$, $b=1$ и рассмотрим систему уравнений

$$(\lambda+\gamma)\sigma(\lambda;x)+2GH\int_{-1}^{1}\frac{z(\lambda;\zeta)\sigma(\lambda;\zeta)}{(x-\zeta)^2+H^2}d\zeta = f(x), \tag{19}$$

$$(\lambda+\gamma)z(\lambda;x)+2G(H+h_1)\int_{-1}^{1}\frac{z(\lambda;\zeta)\sigma(\lambda;\zeta)}{(x-\zeta)^2+(H+h_1)^2}d\zeta = f_1(x),$$

где $0\le\lambda\le1$, $\gamma>0$.

Обозначим через $\sigma_0(x)$ и $z_0(x)$ начальные приближения к функциям $\sigma(x)$ и $z(x)$.

Введем векторы

$$U(x)=\{\sigma(x),z(x)\}^T,\ U_0=\{\sigma_0(x),z_0(x)\}^T,\ G(x)=\{f(x),f_1(x)\}^T,$$

и систему уравнений (19) запишем как

$$KU=G. \tag{20}$$

Приближенное решение уравнения (20) по методу Ньютона – Канторовича находим итерациями

$$u_{k+1}=u_k-[K'(U_0)](KU_k-G),\ k=0,1,\dots \tag{21}$$

Здесь $K'(U_0)$ – производная Фреше оператора $K(U)$ на начальном приближении U_0, определяемая вектором

$$(\lambda+\gamma)\sigma(\lambda;x)+2GH\int_{-1}^{1}\frac{z_0(\zeta)\sigma(\lambda;\zeta)}{(x-\zeta)^2+H^2}d\zeta+2GH\int_{-1}^{1}\frac{\sigma_0(\zeta)z(\lambda;\zeta)}{(x-\zeta)^2+H^2}d\zeta;$$

$$(\lambda+\gamma)z(\lambda;x)+2G(H+h_1)\int_{-1}^{1}\frac{z_0(\zeta)\sigma(\lambda;\zeta)}{(x-\zeta)^2+(H+h_1)^2}d\zeta+$$

$$+2G(H+h_1)\int_{-1}^{1}\frac{\sigma_0(\zeta)z(\lambda;\zeta)}{(x-\zeta)^2+(H+h_1)^2}.$$

Сходимость итераций (21) обосновывается при $\lambda=\lambda_j$, $\lambda_j = j/M$, $j=0,1,\ldots,M$, $\beta>0$, на основании теорем, приведенных в разделе 11 главы 1 [17]. Можно показать, что при достаточно хороших начальных приближениях итерации (21) сходятся.

Для численной реализации метода Ньютона – Канторовича перейдем к приближенным методам в подпространствах.

Приближенное решение системы уравнений (19) имеется в виде вектора $\{\sigma_N(\lambda_N,x), z_N(\lambda,x)\}$, где

$$\sigma_N(\lambda,x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k(\lambda)\psi_k(x),$$

$$z_N(\lambda,x)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k(\lambda)\psi_k(x),$$

$\psi_k(x)$ – фундаментальные полиномы, построенные по узлам полинома Лежандра N-го порядка.

Коэффициенты $\{\alpha_k(\lambda)\}$, $\{\beta_k(\lambda)\}$ находятся по методу Ньютона – Канторовича из системы уравнений

$$(\lambda+\gamma)\sigma_N(\lambda;x)+2GHP_N^x\left[\int_{-1}^{1}P_N^{\zeta}\left[\frac{z_N(\lambda;\zeta)\sigma_N(\lambda;\zeta)}{(x+\zeta)^2+H^2}\right]d\zeta\right]=P_N^x[f(x)],$$

$$(\lambda+\gamma)z_N(\lambda;x)+2G(H+h_1)P_N^x\left[\int_{-1}^{1}P_N^{\zeta}\left[\frac{z_N(\lambda;\zeta)\sigma_N(\lambda;\zeta)}{(x+\zeta)^2+(H+h_1)^2}\right]d\zeta\right]=P_N^x[f_1(x)], \quad (22)$$

Здесь через P_N обозначен оператор, введенный в разд. 1.

Систему уравнений (22) в операторной форме представим уравнением

$$K_{N,\lambda}U_N(\lambda,x)=G(f), \quad (23)$$

где $U_N(\lambda,x)=(\sigma_N(\lambda,x), z_N(\lambda,x))$, $G(f)=(f(t), f_1(t))$. Уравнение (23) при каждом значении λ_j, $\lambda_j = j/M$, $j=0,1,\ldots,M$, решается методом Ньютона – Канторовича

$$U_N^{l+1}(\lambda,x)=U_N^l(\lambda,x)-[K_{N,\lambda}(U_0)]^{-1}(K_{N,\lambda}(U_N^l(\lambda,x)-G(f)),\ \ l=0,1,\dots$$

Здесь $U_0=(\sigma_0(x),z_0(x))$ – начальное приближение. В результате получаем множество векторов $(\sigma^*_{N,j}(x),z^*_{N,j}(x))^T$, $j=0,1,\dots,M$, являющихся решениями уравнения (23) при λ_j, $j=0,1,\dots,M$.

Из этого множества составляем два полинома Бернштейна

$$B_M(\lambda,\sigma(x))=\sum_{k=0}^{M}C_M^k\sigma^*_{N,k}(x)\lambda^k(1-\lambda)^{M-k},$$

$$B_M(\lambda,z(x))=\sum_{k=0}^{M}C_M^k z^*_{N,k}(x)\lambda^k(1-\lambda)^{M-k}.$$

Решением уравнения (17) является вектор

$$(\sigma^*(x),z^*(x))=(B_M(-\beta,\sigma(x)),B_M(-\beta,z(x)),\beta=1/M.$$

Замечание 1. Аналогичным образом строятся итерационные схемы, предназначенные для одновременного нахождения плотности и границы гравитирующего тела для обратных задач потенциала, описываемых уравнениями

$$GH\int_a^b\int_c^d\frac{\sigma(\zeta,\eta)\varphi(\zeta,\eta)}{((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H^2)^{3/2}}d\zeta d\eta=f(x,y,0),$$

$$G(H+h)\int_a^b\int_c^d\frac{\sigma(\zeta,\eta)\varphi(\zeta,\eta)}{((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H+h)^2)^{3/2}}d\zeta d\eta=f(x,y,h)$$

в линейной постановке и уравнениями

$$GH\int_a^b\int_c^d\frac{\sigma(\zeta,\eta)d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H-z(\zeta,\eta))^2)^{1/2}}=f(x,y,0),$$

$$G(H+h)\int_a^b\int_c^d\frac{\sigma(\zeta,\eta)d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H+h-z(\zeta,\eta))^2)^{1/2}}=f(x,y,h)$$

в нелинейной постановке.

Здесь $\sigma(\zeta,\eta)$ и $z(\zeta,\eta)$ – неизвестные функции.

Замечание 2. Аналогичным образом строятся итерационные схемы, предназначенные для приближенного решения обратной задачи логарифмического потенциала в нелинейной постановке

$$G\int_a^b\sigma(s)\ln\frac{(x-s)^2+H^2}{(x-s)^2+(H-z(s))^2}ds=f(x,y),$$

$$G\int_a^b \sigma(s)\ln\frac{(x-s)^2+(H+h)^2}{(x-s)^2+(H+h-z(s))^2}ds = f_1(x).$$

Здесь $\sigma(s)$ и $z(s)$ – неизвестные функции.

Список литературы

1. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 224 с.
2. **Лаврентьев, М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
3. **Иванов, В. К.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танака. – М. : Наука, 1976. – 206 с.
4. **Бакушинский, А. Б.** Итеративные методы решения некорректных задач / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский. – М. : Наука, 1989. – 130 с.
5. **Zhdanov, M. S.** Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems / M. S. Zhdanov. – N. Y. Elsevier, 2002. – 610 p.
6. **Василенко, Г. И.** Восстановление изображений / Г. И. Василенко, А. М. Тараторин. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.
7. **Старостенко, В. И.** Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии / В. И. Старостенко. – Киев : Наукова думка, 1978. – 226 с.
8. **Страхов, В. Н.** К теории обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности / В. Н. Страхов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1974. – № 2. – С. 43–65.
9. **Тихонов, А. Н.** Применение метода регуляризации в нелинейных задачах / А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 463–473.
10. **Бойков, И. В.** Об одном итерационном методе решения обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности / И. В. Бойков, Н. В. Мойко // Известия РАН. Физика Земли. – 1999. – № 2. – С. 52–56.
11. **Натансон, И. П.** Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М. ; Л., 1949. – 688 с.
12. **Boykov, I. V.** Approxmate Solution of Integral Equations with Homotopy Method / I. V. Boykov, S. Faudauoglu, M. Astanin // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. VI Междунар. науч.-техн. конф. (21–25 мая 2012 г.). – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2012. – С. 11–22.
13. **Жданов, М. С.** Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей / М. С. Жданов. – М. : Наука, 1984. – 327 с.
14. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, – М. : Наука, 1977. – 744 с.
15. **Красносельский, М. А.** Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
16. Гравиразведка / под ред. Е. А. Мудрецовой. – М. : Наука, 1981. – 397 с.
17. **Бойков, И. В.** Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. – 316 с.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

Boykov Ilya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

E-mail: math@pnzgu.ru

Бойкова Алла Ильинична
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

Boykova Alla Ilyinichna
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

E-mail: math@pnzgu.ru

УДК 517.392; 550.831

Бойков, И. В.

Применение метода гомотопии к решению обратных задач теории потенциала / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3 (23). – С. 17–28.